

LAHENDUSED JA HINDAMINE

1. ülesanne

Leida ruutfunktsiooni avaldis kujul $y = ax^2 + bx + c$, kui ta graafik puudutab abstsissitelge punktis A(4;0) ja läbib punkti B(6;2).

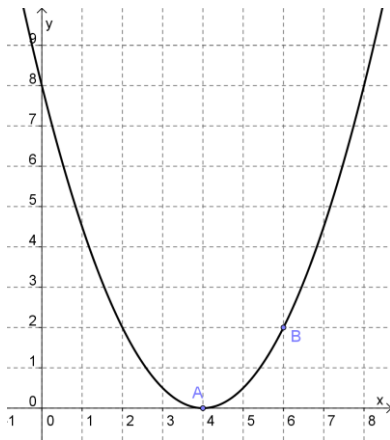
Vastus: $y = 0,5x^2 - 4x + 8$

Lahendus.

Ruutparaboolide võrrandid, mis puudutavad x-telge, avalduvad kõik kujul $y = a(x - x_1)^2$, kus puutepunktiks on P(x_1 ;0). Seega otsitav avaldis on $y = a(x - 4)^2$. Kuna parabool läbib punkti B(6;2), peavad selle koordinaadid rahuldama võrrandit.

$$2 = a(6 - 4)^2 ; 2 = 4a; a = 0,5 \text{ ja } y = 0,5(x - 4)^2 \text{ ehk } y = 0,5x^2 - 4x + 8$$

Kontrolli mõttes võib joonistada graafiku:

**Hindamine:**

Arvestamine, et parabooli x-telje puutumine tähendab võrdseid nullkohti	1 punkt
Otsustus, et otsitav võrrand on $y = a(x - 4)^2$	1 punkt
Punkti B koordinaatide asetamine eelmisesse võrrandisse	1 punkt
Võrrandi $2 = a(6 - 4)^2$ lahendamine	2 punkti
Õige funktsiooni avaldise leidmine	1 punkt
Õige vastuse kirjutamine	1 punkt
Kokku	7 punkti

Kui on jõutud õige tulemuseni teisi teid pidi ja seda piisavalt põhjendatud või näidatud kontrolliga sobivust, siis ikka 7 punkti. Ainult õige vastus ilma kommentaaride ja jooniseta 1 punkt.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

2. ülesanne

Linnast A alustas sõitu linna B poole veoauto sõites ühtlase keskmise kiirusega 50 km/h. Samal ajal alustas talle vastu sõitmist linnast B sõiduauto sõites pidevalt ühtlase kiirusega. Kui nad olid sõitnud 3 tundi, oli kohtumiseni jäänud sõita veel 10 km. Kui nad olid sõitnud 4 tundi, siis olid nad teineteisest möödunud ning nende vahemaa oli 120 km. Mitu tundi sõitis veoauto linnast A linna B ja mitu tundi sõitis sõiduauto linnast B linna A?

Vastus. Veoautol kulus 8 tundi ja sõiduautil kulus 5 tundi.

Lahendus

Olgu sõiduauto keskmine kiirus x km/h ja olgu linnade vaheline kaugus y km. Kuna 3 tunni pärast on kokku sõidetud vahemaa veel 10 km lühem kogu teest, saame võrrandi $150 + 3x = y - 10$. Kuna 4 tunni pärast on nad läbinud kokku kogu tee ja veel 120 km, saame võrrandi $200 + 4x = y + 120$.

Lahendame võrrandisüsteemi:

$$\begin{cases} 3x - y = -160 \\ 4x - y = -80 \end{cases}, \text{ millest saame } \begin{cases} x = 80 \\ y = 400 \end{cases}$$

Kui teepikkus oli A ja B vahel 400 km, siis kulus keskmise ühtlase kiirusega 50 km/h selle läbimiseks veoautol $400 : 50 = 8$ tundi ja sõiduautil kiirusega 80 km/h kulus $400 : 80 = 5$ tundi.

Hindamine:

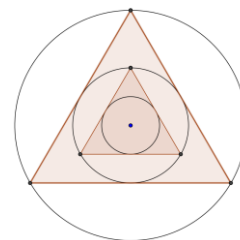
Sobiv x ja y määramine	1 punkt
Võrrand 3 tunnise sõidu põhjal	1 punkt
Võrrand 4 tunnise sõidu põhjal	1 punkt
Võrrandisüsteemi lahendamine	2 punkti
Kummagi auto sõiduaja leidmine	1 punkt
Õige vastuse kirjutamine	1 punkt
	Kokku 7 punkti

Kui on jõutud õige tulemuseni teisi teid pidi ja seda piisavalt põhjendatud või näidatud kontrolliga sobivust, siis ikka 7 punkti. Ainult õige vastus ilma kommentaaride ja selgituseta 1 punkt.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

3. ülesanne

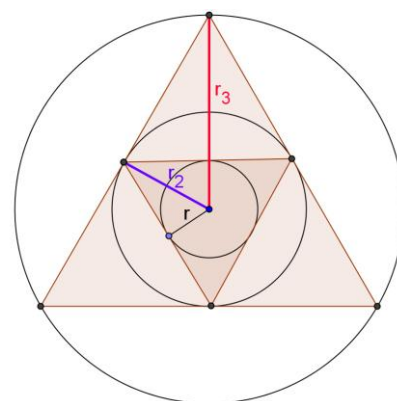
Rngi sisse on kujundatud võrdkülgne kolmnurk, mille tipud asuvad ringjoonel. Selle kolmnurga sisse on kujundatud ring, mis puutub kolmnurga kõiki külgi. Selle ringi sisse on kujundatud võrdkülgne kolmnurk, mille tipud asuvad ringjoonel ning ka selle kolmnurga sisse on kujundatud ring, mis puutub kolmnurga kõiki külgi (vt joonist). Leida, mitme protsendi võrra on vähima ringi pindala suurima ringi pindalast väiksem.



Vastus. Väikese ringi pindala on 93,75% võrra suure ringi pindalast väiksem.

Lahendus. (üks võimalik)

Muudame joonist ilma ülesande sisu muutmata. Sellelt ilmneb, et väikse kolmnurga küljepikkus on kolmnurga kesklõigu omaduse järgi 2 korda lühem suure kolmnurga küljepikkusest. Sama sarnasustegur on ka vähima ringi ja keskmise ringi joonelementide vahel. Võrdkülgse kolmnurga nii sise- kui välisringjoone keskpunktiks on mediaanide lõikepunkt ja seetõttu mediaanide omaduse põhjal on kolmnurga välisringjoone raadius 2 korda pikem kolmnurga siseringjoone raadiusest. Seega tähistades vähima ringi raadiuse r , keskmise r_2 ja suurima r_3 , saame $r_3=2r_2=4r$.



Vähima ringi pindala on $S_{vähim} = \pi r^2$ ja suurima ringi

pindala on $S_{suurim} = \pi(4r)^2 = 16\pi r^2$

Vähima ringi pindala on suurima ringi pindalast väiksem

$$\frac{16\pi r^2 - \pi r^2}{16\pi r^2} = \frac{15}{16} \text{ ehk } \underline{\underline{93\frac{3}{4}\% \text{ võrra}}}$$

Hindamine:

Tõdemus ja põhjendus, et vähima ringi raadius on 2 korda lühem keskmise ringi raadiusest	1 punkt
Tõdemus ja põhjendus, et keskmise ringi raadius on 2 korda lühem suurima ringi raadiusest	1 punkt
Tõdemus ja põhjendus, et vähima ringi raadius on 4 korda lühem suurima ringi raadiusest	1 punkt
Tõdemus ja põhjendus, et väikese ringi pindala on 1/16 suure ringi pindalast	1 punkt
Tõdemus, et väikese ringi pindala on 15/16 võrra suure ringi pindalast väiksem	1 punkt
15/16 väljendamine täpse protsendina	1 punkt
Õige vastuse kirjutamine	1 punkt
Kokku	7 punkti

Kui on jõutud õige tulemuseni teisi teid pidi ja seda piisavalt põhjendatud, siis ikka 7 punkti. Kui on jõutud jooniselt mõõtmist kasutades õige otsustuseni raadiuste 4 kordsest erinevusest, anda kolme esimese punkti asemel 1 punkt. Kui on pakutud lõppvastuseks 6,25% (nii palju moodustab väikese ringi pindala suure ringi pindalast), siis kokku mitte üle 4 punkti.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

4.ülesanne

Kaksikuteks nimetatakse kaht algarvu, millede vahe on kaks. Tõestada, et kahe kaksiku ja kolme nende vahetu naabri korrutis jagub alati arvuga 240. (Näiteks on kaksikud algarvud 3 ja 5 ning $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ ja $720 : 240 = 3$)

Lahendus

Kuna kaksikud ise on paaritud arvud, siis nende kolm naabrit on järjestikused paarisarvud. Paarisarvud on ühtlasi üle ühe ka 4-kordsed. Seega need kolm naabrit jaguvad kõik kahega, aga vähemalt üks seejuures 4-ga, ehk saadav korrutis jagub $2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$ -ga. Kuna meil on viis järjestikkust naturaalarvu, siis on nende hulgas alati üks, mis jagub 3-ga (antud ülesandes saab see olla vaid keskmine arv) ja üks, mis jagub 5-ga seega jagub nende korrutis ka $3 \cdot 5 = 15$ -ga ehk kokkuvõttes $15 \cdot 16 = 240$ -ga, mida oligi tarvis tõestada.

Hindamine:

Tõdemus, et kaksikute lähinaabrid on järjestikkused paarisarvud	1 punkt
Tõdemus, et vähemalt üks naabritest on 4-ga jaguv	1 punkt
Tõdemus, et vähemalt üks naabritest on 3-ga jaguv	1 punkt
Tõdemus, et vähemalt üks naabritest on 5-ga jaguv	1 punkt
Järeldus, et vaadeldava viie järjestikkuse naturaalarvu korrutis jagub alati $2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 240$ -ga	3 punkt

Kokku 7 punkti

Kui on tehtud väidet kinnitatavaid arvutusi vähemalt 3 viisikuga, anda siiski mitte üle 1 punkti.

LAHENDUSED JA HINDAMINE

5.ülesanne

Kaksküla saarel on kaks küla Tõevere ja Valevere. Tõeveres elavad tõesuud, kes räägivad alati tõtt ja Valeveres valesuud, kes alati valetavad. Üks komme oli neil aga ühine. Iga kodu ukse juures kasvas perepuu, milleks oli kas kask või pärn või tamm. Kapten võttis saarelt kaasa 10 saareelanikku. Ta otsustas teha selgeks, mitu tõerääkijat ja mitu valetajat pardal on. Kapten jagas reisijatele lehekesed küsimusega „Kas su ukse ees kasvab kask?“ ja sai 2 jaatavat ning 8 eitavat vastust. Siis jagas ta välja küsimuse „Kas su ukse ees kasvab pärn?“ ja sai 5 jaatavat ja 5 eitavat vastust. Lõpuks küsimusele „Kas su ukse ees kasvab tamm?“ sai ta 6 jaatavat ja 4 eitavat vastust.

Mitu tõesuud ja mitu valesuud oli pardal?

Vastus. Tõesuid oli 7 ja valesuid 3.

Lahendus I

Iga tõesuu sai sellistele küsimustele vastates öelda „jah“ ainult ühel juhul – siis kui pakuti õiget puud. Seevastu valesuud ütlesid „jah“ kahel korral, siis kui pakuti puud, mida neil polnud. Kuna kokku oli „jah“ vastuseid $2 + 5 + 6 = 13$, aga pardal 10 reisijat, siis 3 neist vastas „jah“ kahel korral st valetajaid oligi 3 ja tõerääkijaid $10 - 3 = 7$.

Lahendus II

Iga tõesuu ütles sellistele küsimustele vastates „ei“ täpselt kahel korral – siis kui pakuti vale puud. Seevastu valesuud ütlesid „ei“ ainult ühel korral, siis kui pakuti puud, mis neil maja ukse ees kasvas. Kuna kokku oli „ei“ vastuseid 17, aga pardal 10 reisijat, siis 7 neist vastas „ei“ kahel korral st tõerääkijaid oligi 7 ja ülejäänus $10 - 7 = 3$ olid valetajaid.

Hindamine:

Tõdemus, et iga tõesuu vastab vaid üks kord „jah“	1 punkt
Tõdemus, et iga valesuu vastab täpselt 2 korda „jah“	1 punkt
Tõdemus, et iga „jah“, mis on üle 10, tähendab ühte valesuud	2 punkt
Õige järeldus tõesuude ja valesuude arvu kohta	2 punkt
Õige vastus	1 punkt
Kokku	7 punkti

Kui on õige järelduseni jõutud teisi teid pidi (nt tabeliga), siis lähtuda arutluste õigsusest.